

К построению адекватной характеристики динамики состояния популяции енисейского муксуна на основе результатов полевых исследований для проведения процесса математического моделирования

Д-р биол. наук Н.Д. Гайденок, П.М. Клементенок – г. Красноярск, ndgay@mail.ru

Ключевые слова: енисейский муксун, динамика состояния популяции, особенности результатов полевых исследований, социально-политико-экономические особенности промысла, математическое моделирование

В статье даются особенности результатов полевых исследований енисейского муксуна. Показано наличие коллизий между результатами полевых исследований отдельных авторов.

Математическое моделирование по своей природе ничего иного, кроме как переклада языка биологии на язык математики с целью повышения эффективности проведения аналитических и вычислительных операций, не представляет. Например, такой оператор векторного анализа, как дивергенция, положенный в основу уравнения в частных производных Ферстнера – Мак-Кендрика, описывающий динамику возрастного (размерного, весового, т.д.) состава той или иной популяции, является не более чем формальным аналогом банальнейшего балансового соотношения: что пришло, что ушло – разность осталась.



Рис. 1. Многообразие вариантов состояния КЕМ

пуляционного континуума енисейского муксуна (КЕМ) [5], по крайней мере, необходимо:

1. Привести те эколого-промысловые факты, которые определяют его динамику; разобраться в их внутренней непротиворечивости, обратная сторона которой легко проявляется в «полевых науках» (табл. 1);

2. Затем сделать «простую замену» слов на символы и получить количественно обоснованную оценку адекватности того, что положили в основу процесса; затем, устранив противоречия, получить возможность проводить вычислительный эксперимент по выяснению истинности положения дел.

Итак, в процессе настройки модели по результатам полевых исследований возникли «традиционные трудности» по построению на основе этих данных проверочной последовательности, обусловленные определенными коллизиями результатов, которые в общих чертах могут быть представлены двумя крайними вариантами:

1. Пессимистичный, точнее, реальный – результаты исследований до 1971 г., представленные следующими авторами –



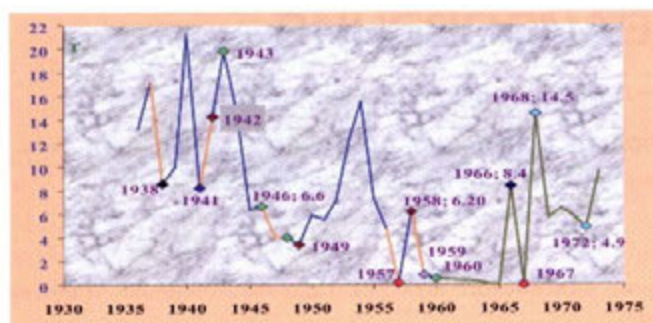
Кроме того, математическое моделирование, выраженное в соответствующей форме, просто представляет собой ревизию результатов биологических исследований. Как говорил известный математик Гексли, «математика подобна мельнице: как из лебеды вы не получите крупчатки (элитный сорт белой муки), так из плохих данных вы не получите корректных результатов». Таким образом, чтобы адекватно воспроизвести динамику не популяции (не корректно), а, именно, по-

Таблица 1. Анализ возрастного состава по А.А. Куклину (1978); [9]

1978	1982
«Последние годы основу уловов составляют относительно малочисленные поколения, родившиеся в начале 60-х годов»	«Анализ относительной урожайности поколений муксуна дает 1. поколения 1962 – 1967 (кроме 65) – урожайные 2. 1968 – 1970 – в целом урожайные»



Рис. 2. Регулирование лимитов и динамика среднего возраста уловов по ПЛТК Лимит.xls



Обозначения: оранжевый цвет – политико-экономические события

Рис. 3. Динамика вылова производителей в реке

А.В. Подлесный, А.А. Лобовикова, М.А. Тюльпанов [11; 12; 13], и за 1970-2004 гг. П.М. Клементенко [8] – далее «сценарий ПЛТК»;

2. Оптимистичный – единственный апологет А.А. Куклин – далее «сценарий Куклина».

Визуально динамика степени (доли 1) соответствия популяции квазиестественному или предэксплуатационному состоянию, оцениваемая по длине анадромной миграции и заключениям выше указанных авторов, в соответствии с этими сценариями может выглядеть следующим образом (рис. 1).

Таблица 2.

№	Результаты исследований	Природа данных	Статус достоверности данных
1	В.Л. Исаченко [7] производители в устье р. Бахта (42 км ниже Сумароково)	Наблюдение	Достоверны
2	В.Н. Башмаков (1936) производители на Осиновском Пороге (90 км выше Сумароково); штучный промысел от Верещагино до Осиновского Порога	Наблюдение	Достоверны
3	А.В. Подлесный – в 1940 г. нет производителей на Сумароково – максимум на 270-430 км ниже Сумароково	Промстатистика, Опрос	Вероятны
4	А.А. Лобовикова (1965) – после 1948 г – производители выше Турханска не поднимаются (482 км ниже Сумароково)	Промстатистика, Опрос	Вероятны
5	М.А. Тюльпанов		
6	а) «... к середине 60-х гг. состояние запасов муксуна было тяжелейшим за всю историю его промысла...»	Промстатистика – на основе минимального вылова в Нижнем Течении Енисея	Вероятны
	б) Нерестилища между Игаркой и Курейкой	Промстатистика, Опрос	Вероятны
	Головки Г.И., Попов П.А. [6] В 1973 г. не обнаружили нерестилищ в р. Танама	Наблюдения	Вероятны – всего один полевой сезон
7	А.А. Куклин (1978)		
8	а) после длительного перерыва появление в 1971 г производителей на Сумароково	Опрос	Вероятны
	б) вылов в 1977 г. 100 шт. производителей на Сумароково	Наблюдение	Достоверны
	в) поимка в Низовьях Енисея в 1980 г муксуна возраста 20+ [9]	Не ясна природа – в работе нет прочих данных за 1980 г.	Маловероятны – в исследованиях П.М. Клементенко этот факт не упомянут
8	П.М. Клементенко – поимка в Низовьях Енисея в 1996 г. муксуна возраста 19+ [8]	Наблюдение	Достоверны
9	В.А. Заделенов – в 1996 г. на Сумароково много крупного муксуна; 1992 и 2003 – подходы меньше	Наблюдение	Достоверны

Но, здесь налицо явное расхождение результатов. Какой «сценарий» выбрать? А.А. Куклина или коллектива авторов? Обсудим это более подробно. На фоне бесспорного факта падения общей численности КЕМ в 1940-1960-х гг. возникают коллизии в темпах восстановления КЕМ, которые приобретут дополнительную ясность после знакомства с хронологией результатов исследований КЕМ [5] (табл. 2).

Такая ситуация, когда вместо одного ярко выраженного экстремума (минимум в данном случае), отражающего момент подъема состояния КЕМ, имеется несколько, например, 1954 г. и 1967 г., и на всем указанном интервале – от 1948 г. до 1973 г., вообще говоря, проглядывается практически один и тот же минимальный уровень в теории многокритериальной оптимизации, характеризуется областью устойчивой оптимизации. Это означает правомочность выбора любого года, из указанного интервала, в качестве поворотной точки динамики и дает целый «пучок» траекторий динамики, среди которого, за неимением дифференцирующей информации, оставалось бы взять средний вариант – все равны – на основе принципа недостаточного основания Лапласа.

Впрочем, по теории принятия решений, в случае неопределенности, предлагается использование трех критериев – оптимума Сэвиджа ↔ «сценарий Куклина», пессимума Вальда ↔ «сценарий ПЛТК» ↔ «предосторожный подход» и центристский – Гурвица, совпадающего в данном случае с выбором на основе принципа недостаточного основания Лапласу – все варианты имеют равную вероятность (рис. 1).

Однако возможен и такой вариант, когда привлекается дополнительная информация, способствующая выбору единственной траектории.

Пойдем по второму пути. Самым первым неожиданным аспектом в табл. 2. является тот факт, что результаты исследований за 1940-1971 гг., свидетельствующие о протяженности анадромной миграции, вообще говоря, вероятны, а не достоверны. Ибо они получены по опросам, а не по наблюдениям. И хотя опросы – это лучше, чем ничего, тем не менее, именно в данном случае они могут нести сугубо «потребительскую ошибку».

Действительно, вполне возможно что, по крайней мере, еще 1940 г. муксун поднимался до Сумароково, хотя и не в столь значительных количествах, как в 1936 г., ввиду не столь длительного предшествовавшего периода промэксплуатации. Также вполне возможно, что и ловили его по несколько экземпляров за сезон. Но они могли не попадать в промстатистику, ввиду банального опасения – открывать «новую строку» потребуют повысить показатели. Либо просто «расхотелись по рукам».

Другим неожиданным аспектом табл. 2. являются результаты исследований А.А. Куклина, которые на указанном фоне тяжелого состояния КЕМ показывают несколько обескураживающие и противоречащие, как друг другу, так и результатам исследований до 1971 г. факты:

- С одной стороны, это его комментарии [9] выше указанной (п. 5) ситуации: «Сокращение запасов енисейского муксуна снизило и воспроизводительный потенциал популяции: в конце 50-х – начале 60-х гг. вылов производителей в реке сократился до исчезающе малых величин (~ 2-4 т/год)»;
- А с другой – появление на Сумароково в 1971 г. производителей, подчеркивая, «после длительного перерыва» (Куклин, 1978) и поимка в Низовьях Енисея в 1980 г муксуна возраста 20+ [9].

Здесь по первому пункту отметим, А.А. Куклин, по известным ему причинам, производит «незначительное уточнение» в виде сдвига сроков максимума тяжести положения КЕМ на более ранние годы – с середины 1960-х гг. на конец 1950-х – начало 60-х гг., иначе возникают проблемы с п. 2. Ибо без наличия «хребта когорты» присутствие ее крайних элементов (*предельные возраста*) скорее будет свидетельствовать о предагонии, чем процветании.

Действительно, парадоксальность «1971 г.» означающего фактическое восстановление КЕМ хотя бы до уровня 1936 г., когда В.Н. Башмаков обнаружил производителей на Вороговском многоостровье (табл. 2), и уже когда, как подчеркивал В.Н. Башмаков, промысел муксуна от Верещагино до Осиновских порогов носит «штучный характер», заключается в том, что в 1971 г. на Сумароково могли прийти только потомки тех производителей, которых в «...в конце 50-х – начале 60-х гг. ...были исчезающе малые величины...», ведь модальный возраст производителей на Сумароково 13+ [9].

Да и 1971 г. как-то не так далеко отстоит от середины 1960-х гг., когда, согласно М.А. Тюльпанову [13], было «...тяжелее состояние популяции ...» и «...в настоящее время муксун нерестится между Игаркой и Курекой...» на 800 км ниже Сумароково. Впрочем, судя по В.Н. Башмакову, основные нерестилища уже в 1936 г. были ниже Туруханска, в отличие от 1912 г. по В.Л. Исаченко [7], со времен которого неизвестно функционируют ли нерестилища в районе устья р. Бахта, может быть, там «локальный оазис».

Кроме того, факт поимки в Низовьях Енисея в 1980 г. муксуна возраста 20+ [9] можно было бы интерпретировать, как восстановление квазиестественного или предэксплуатационного – «Башмаковского» – состояния КЕМ к 1980-м годам. Но этот, можно сказать, «краеугольный камень» никак не детализируется А.А. Куклиным, словно он «снят с кривой «Длина-Вес». А детализацию, безусловно, необходимо было сделать.

Но в работе А.А. Куклина [9] есть и контраргумент своим же заключениям, суть которого в следующем. До 1971 г. в работах енисейских ихтиологов, особенно А.В. Подлесного [12] и А.А. Лобовиковой [11] красной нитью проходит тезис о неоднородности КЕМ [2; 4] – наличие тундровой разновидности, нерест которой происходит в реках Яра, Танама и Сосновая. Такое заключение основывалось на присутствии

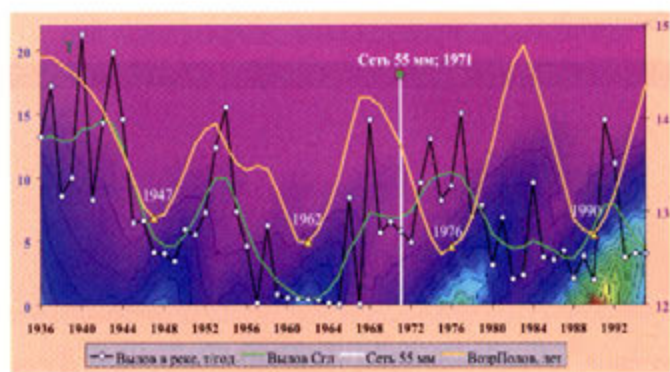


Рис. 4. Динамика возрастной структуры производителей, вылова в реке и возраста половозрелой части популяции

в них в сентябре-октябре производителей возраста 14+ - 16+ с IV стадией зрелости икры.

Причем, в Танама, согласно возрасту, – это повторно нерестящиеся особи, как и на Сумароково [9]. Что позволяет говорить уже о более существенном: если Танама подобна Сумароково, в плане повторного нереста муксуна озимой расы, а впервые нерестящиеся озимой расы особи нерестятся на нижних нерестилищах на участке Игарка-Туруханск, то это значит, что впервые нерестящиеся того элемента КЕМ нерестятся на более ближних к местам нагула нерестилищах, т.е. тундровые речки – никем до селе не исследованы на вопрос возможности нереста дельтовые протоки и рукава Енисея.

Даже если допустить тот факт, что производители возраста 14+ - 16+ с IV стадией зрелости икры не будут нереститься в Танама или где-то поблизости от Бреховских отмелей, то до ледостава они максимально могут подняться только до р. Хантайке, полностью повторяя один из путей миграции карской ряпушки [14]. Это полностью отличный от озимой расы элемент КЕМ.

Ихтиологи томского ИББ Г.И. Головки, П.А. Попов [6], на основании всего лишь одного полевого сезона, в 1973 г. не обнаружили нерестилищ в р. Танама. Выводы здесь могут быть следующие – либо муксун там никогда не нерестился и А.В. Подлесный и А.А. Лобовикова выдают предположение за истину, либо Г.И. Головки и П.А. Попову стоило поработать в течение нескольких сезонов, чтобы прийти к категоричным выводам, либо к 1973 г. КЕМ еще не только не восстановил свою численность, но и еще более ее снизил. Ведь исследования М.А. Тюльпанова и А.А. Лобовиковой относятся к началу-середине 1960-х годов.

Конечно, здесь можно понимать так – А.А. Куклин имел в виду «единицы», которые, по всей вероятности, могли быть на Сумароково всегда, а М.А. Тюльпанов – массовый нерест. Но нигде в работах А.А. Куклина и М.А. Тюльпанова этого не оговорено.

Далее, следуя выше изложенным результатам, необходимо прийти к выводу: либо данные исследований до 1971 г. Неверны, за 6 лет муксун не мог восстановить состояние на 1936 г., и наиболее тяжелое состояние популяции было раньше середины 1960-х гг. (*малиновый пик*, рис. 1), либо производители ЕМ озимой расы [5] всегда в небольших количествах присутствовали на Сумароково, либо неадекватны данные А.А. Куклина и производители появились, хотя бы в конце 1970-х гг., ибо А.А. Куклин [9] 1971 г. уже трансформировался в «начало 1970-х гг.».

Кроме того, здесь следует добавить тот факт, что в 1960-е гг. не было запрета на лов муксуна, и лимит составлял 200 т,

Таблица 3.

Дата	Событие
1938	Переход промыслов от ГСМП к ГУЛАГ
1941	Начало войны
1943-1945	Лэнд-Лиз
1946-1949	Первая амнистия спецпоселенцев
1957	Вторая амнистия спецпоселенцев
1959	Переход промыслов от ГУЛАГ к КрасноярскРыбПрому
1961	Введение новой редакции правил рыболовства
1967	Рекомендации Красноярского отделения СибНИИРХ по снижению лимита с 300 до 200 т

который, согласно работе [13], также был завышенным. Далее М.А. Тюльпанов пишет: «При этом надо учитывать еще и тот факт, чтобы покрыть лимит мерным муксуном – новые требования приемки рыбопродукции – из водоема извлекалось не 200-300 т лимита, а 400-450 т фактически». Далее следует, что вылов в период 1957-1971 гг. существенно не менялся в отношении к 1941-1957 гг. (Тюльпанов, 1971). Так, что ресурсов на «блиц-рост» с 1966 г по 1971 г. – сценарий А.А. Куклина – у муксуна не было.

Банально-очевидным выводом из выше изложенного могло бы послужить следующее высказывание: А.А. Куклину стоило бы «определиться с фактами и не налегать на арифметику», если взять минимально возможный возраст производителя в 11+ и прибавить к нему разницу между 1971 г. и 1980 г. то получится ровно 20+. В качестве пробы для «арифметики, иллюстрирующей процветание КЕМ», может послужить, приводимая в его работе [9], рекомендация о повышении лимита на 50 т «с активизацией вылова производителей» (рис. 2).

Однако и с базисом для вывода о «...к середине 60-х гг. состояние запасов муксуна было тяжелейшим за всю историю его промысла...» тоже не все гладко. Но здесь для понимания сути вылова производителей в реке – «козырного туза» ПЛТК, который, впрочем, «несколько изменяя» признает и А.А. Куклин, просто необходим анализ социально-политико-экономических особенностей промысла.

Его начнем с довольно специфической стороны. В середине 1960-х гг. перед енисейскими ихтиологами стояла довольно трудная задача: необходимо было показать всем представляемую тяжесть положения КЕМ. Сравнительные сопоставления возрастных распределений уловов за 1930-е гг. и 1950-е гг. не давали впечатлительного эффекта. Нужен был другой показатель. И он был найден – видимое падение величин вылова производителей в реке. Но при этом никто не сообщал ни о сокращении, как числа рыбаков, так

и неводных песков (сокращение в 2-3 раза) в результате амнистий спецконтингента.

Сообщались только «итоговые величины». Например, в работе М.А. Тюльпанова содержатся данные по динамике промысла производителей (рис. ВылРек), где в 1966 г. поймано 8,4 т, а в 1968 г. – 14,5 т, больше, чем среднее за последний пик уловов в 1950-1953 гг. во время строительства дороги «Салехард-Игарка».

Далее, как видно из рис. 3., подавляющее большинство спадов вылова связано с политико-экономическими событиями и только одно с научными рекомендациями (табл. 3). Поэтому на настоящий момент времени нет возможности однозначно говорить о причинах выше сказанного – «в конце 50-х-начале 60-х гг. вылов производителей в реке сократился до исчезающе малых величин (~ 2-4 т/год)». То ли это переходный период экономики, то ли состояние популяции. Но, как и выше упомянутый «казус 1971 г.», так и масштабные всплески уловов в 1966 г. и 1968 г. говорят далеко не в пользу «...тяжелейшего состояния запасов муксуна...».

Кроме того, если мысленно убрать «нулевые величины» для периода 1957-1967 гг. с рис. 3., то видно, что вылов находится примерно на уровне 5-8 т при среднем – 6 тонн.

В ситуации, характеризующейся отсутствием строгих доказательств в пользу того или иного довода с позиций теории принятия решений, следует говорить, на основании «принципа недостаточного основания» Лапласа, – все причины имеют равную вероятность. В данном случае это центризм – «спад уловов – следствие совокупности причин «полит-экономики» и состояния запасов.

В связи с этим термин «тяжелейшее» может потерять указанную М.А. Тюльпановым временную привязку и сместится «по ближе к временам» строительства дороги «Салехард-Игарка» или еще более ранние или, наоборот, еще в более поздние, ибо результаты исследований П.М. Клементенка

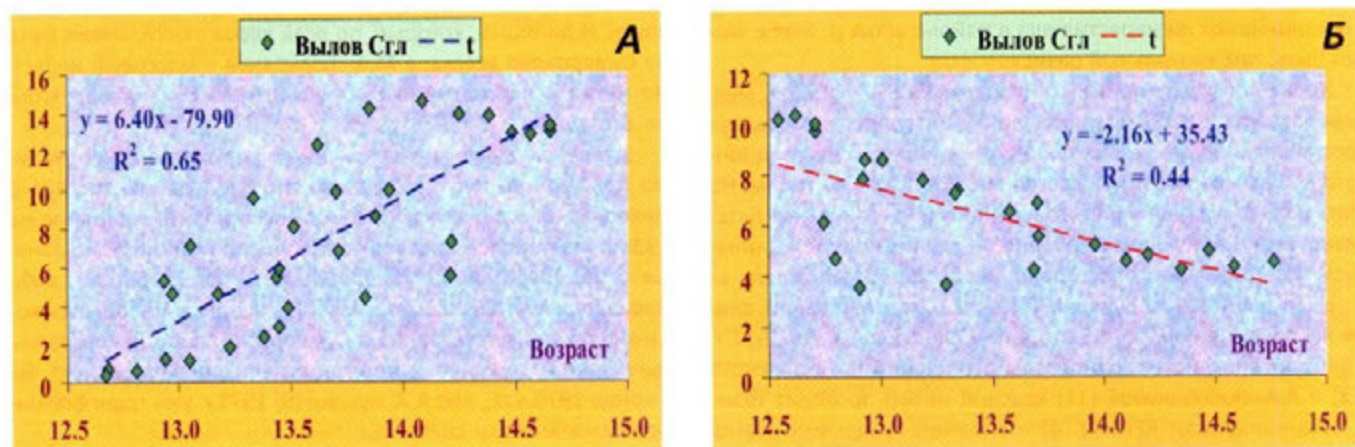


Рис. 5. Зависимости между сглаженным выловом и средним возрастом половозрелых особей за различные периоды

(2008) за 1970-1990 гг., которому А.А. Куклин [9] объявил благодарность за помощь в проведении исследований на Севере, уже вносят свои, и отнюдь не пессимистические, а, именно, реалистические коррективы оптимистическому сценарию А.А. Куклина в виде снижения темпов восстановления состояния КЕМ (рис. 2).

Пики возраста на «провалах поверхности», например, 1952-1954 гг. и 1967-1970 гг., обусловлены отсутствием производителей младших возрастных классов и относительно высокой долей старше-возрастных, которые должны идти на верхние нерестилища.

Коэффициент корреляции между сглаженным выловом и средним возрастом половозрелых особей за период 1936-1970 гг. (рис. 5.а) до введения сети на 55 мм равен $r^2 = 0.65$.

Зато, после введения сети на 55 мм (рис. 5.б) зависимость приобретает обратный характер при $r^2 = 0.44$, говоря о том, что состояние популяции, судя по увеличению возраста, улучшалось, а вылов производителей сокращался по мере фактической замены сети 50 мм на 55 мм.

Для завершения анализа особенностей вылова производителей в реке рассмотрим особенности взаимосвязи сглаженного вылова в реке, возраста половозрелой части популяции (сценарий ПЛТК) и индекса расхода воды по п. Игарка (рис. 6). Как известно, промысел имеет три составляющие – состояние сырьевой базы, организационно – техническое обеспечение и гидрометеорологические условия.

Период 1936-1968 гг. рассмотрен выше. Здесь все определялось состоянием сырьевой базы. Однако, начиная с 1968 г по 1979 г., вылов определялся особенностями расхода воды – $r^2 = 0.777$ – гидрометеорологические условия.

Затем, в XI пятилетке 1981-1985 гг. вылов имел четкий отрицательный тренд в противовес, повышению расхода, так и возраста половозрелой части популяции. Это был период частой смены генеральных секретарей КПСС. Это говорит о влиянии «организационно-технической» составляющей промысла.

Зато, начиная с XII пятилетки, вылов вновь стал определяться особенностями расхода воды – $r^2 = 0.762$.

Окончательные выводы о состоянии популяции муксуна возможны в результате математического моделирования, к анализу результатов которого наиболее целесообразно уже перейти после длительного вступления [3; 4; 5], вызванного необходимостью анализа откровенно специфического состояния результатов полевых наблюдений енисейских ихтиологов, и которое, по всей вероятности, позволит, в конце концов, получить ответ на вопрос о выборе наиболее адекватного сценария событий и разобраться с моментом «...тяжелейшего, за всю историю его промысла, состояния...». Несмотря на то что, как предосторожный подход, тождественный критерию пессимума Вальда, так и, тем более, здравый смысл и демографические параметры муксуна [1] и данные (рис. 2) не оставляют сомнений за истинностью выбора сценария «ПЛТК», как наиболее адекватного.

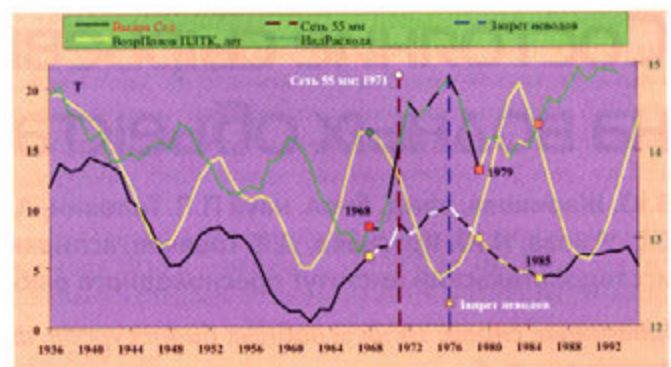


Рис. 6. Динамика сглаженного вылова в реке, возраста половозрелой части популяции (сценарий ПЛТК) и индекса расхода воды по п. Игарка

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гайденок Н.Д., Чмаркова Г.М. Об одном подходе к определению коэффициентов естественной смертности ихтиофауны на примере полибиомы р. Енисей // Проблемы использования и охраны природных ресурсов центральной Сибири. КНИИГиМС Вып. 5. Красноярск, 2003 г. С 136 - 142
2. Гайденок Н.Д., Исаева О. М., Чмаркова Г.М.. Субпопуляции енисейского муксуна *Coregonus muksun (Pallas)* и особенности их нерестовых миграций – Тюмень, Матер. 7 Межд. Сигового совещания, 2010, с – 317 – 321.
3. Гайденок Н. Д., Клементенок П.М., Чмаркова Г. М.. Экология и промысел енисейского муксуна *Coregonus muksun (Pallas)* // Рыбное хозяйство 2011. № 2. – С 46 – 50.
4. Н.Д. Гайденок К вопросу о структуре субпопуляционного континуума енисейского муксуна *Coregonus muksun (Pallas)* // Рыбное хозяйство 2013. № 4. – С 56 – 60.
5. Гайденок Н. Д., Клементенок П.М., А.А. Куклин Енисейский муксун – формы, расы, субпопуляции, популяции, континуум // Рыбное хозяйство 2014. № 1. – С 70-76.
6. Головкин Г.И., Попов П.А. Состояние рыбных запасов реки Танама и меры их рационального использования. Отчет по х/д теме с Красноярск. рыбопром. объед. Науч. рук Головкин В.И. - Томск 1974 - 70 с
7. Исаченко В.Л. Рыбы Туруханского края, встречающиеся в реке Енисее и Енисейском заливе // Материалы по исследованию Енисей в рыбопромысловом отношении. – Красноярск: 1912, вып. 6. – 112 с
8. Клементенок П.М. Оценка состояния запасов основных промысловых видов рыб в низовья Енисея по многолетним наблюдениям за период 1969 – 2004 гг. - Матер. Енисеярыбвода, 2008. – 80 с.
9. Куклин А. А. Биологическая характеристика муксуна р. Енисей и перспективы его рыбо - хозяйственного использования: Дисс. ... канд. биол. наук.- Л., 1982.- 158 с.
10. Лобовикова А.А. К экологии нереста восточносибирского сига и карской ряпушки // Тр. Красноярского отд. СибНИПКРХ «Вопросы рыбного хозяйства Восточной Сибири». - Красноярск, Красноярское книжное изд-во, 1975, т. 10, С. 61 – 66.
11. Лобовикова А.А. Биологические группы муксуна в системе Енисей // Мат. сов. По биол. продуктивности Сибири. – Иркутск, 1966, с. 49 – 50
12. Подлесный А.В. Муксун *Coregonus muksun (Pallas)*. Промыслово - биологический очерк // Тр. Сиб. Отд.ВНИИОРХ, 1948, т. 7, С. 112 –
13. Тюльпанов М.А. Анализ состояния запасов и реорганизация промысла ценных рыб в низовьях Енисея // Проблемы рыбного хозяйства водоемов Сибири. – Тюмень, 1971, С. 102-12
14. Устюгов А.Ф. О происхождении двух экологических форм сибирской ряпушки *Coregonus albula sardinella (Val.)* бассейна реки Енисей// Вопр. ихт., 1976, С. 773-783.

On creation of an adequate dynamics of Yenisei's whitefish population characteristics based on the results of field investigations for mathematical modeling

Gaydenok N.D., Doctor of Sciences – ndgay@mail.ru

In the article the peculiarities of Yenisei's whitefish experimental investigations results are given. Collisions between the different authors' investigations results are shown.

Key words: Yenisei's whitefish population, peculiarity of experimental investigations results, social-politic-economic features of capture, mathematical modeling